

実スケール開水路乱流解析のためのLESサブグリッドモデルの検討

Study of LES Subgrid Model for Calculation of Real Scale Open Channel Flow

久末信幸

Nobuyuki Hisasue

中山昭彦

Akihiko Nakayama

横嶋哲

Satoshi Yokojima

1. はじめに

ラージ・エディー・シミュレーション(LES)法は差分法あるいはスペクトル法で空間平均化した運動方程式と連続式を解く手法から発達し、有限要素法、変分法を基にした手法など多様な手法に発展している。サブグリッドスケール効果のモデルも多く提案され、基本的流れで検証され、色々な分野で応用されるに至っている(例えば Sagaut¹⁾)。しかし、LES 法を実際の流れ問題に適用するには、いまだ解決されていない問題がいくつか残っている。

実問題で重要な点は幾つかあるが、最も深刻なのはスケールの大きさで、数値計算にて解像できるスケールと粘性スケールが大きくかけ離れているということである。従って、固体境界面近傍粘性底層はもちろん、境界層をも解像するのが難しい場合がほとんどである。境界は水理学的に滑らかな面は殆どなく、境界形状には解像出来ない小スケール凹凸が必ずあることである。更に水面が変動する場合、流れ領域自体が乱れ、3 次元流れが、時間的にも変化している。また工学的には、乱れや構造の詳細よりも流れ全体の抵抗や水面勾配、エネルギー損失などを精度よく予測することが重要になる。従って粘性応力法則を直接適用せず流れの抵抗やエネルギー損失が如何に再現できるかが鍵になる。また実務に使うには、モデルやコーディングはなるべくシンプルで明快で、信頼性の高い手法、さらに不備がなければ、これまで広く使われ、実証されているものを使用することが望まれる。

ここでは前報²⁾で手法の詳細を説明している、空間フィルタ平均した運動方程式を基にした Classical と言われる LES 法を、とくに河川、水力施設、沿岸の潮流などの実スケールの自由水面流れに適用するにあたり重要な点を再度とりあげる。通常手法やモデル開発で一般的に行われる検証では十分検討されていない、スケールの効果、複雑な境界条件、水面の影響などを基礎的流れで検証する。

2. 実務のための LES 計算法の概要

2. 1 基礎方程式

ここで用いられる基礎式は前報と同様で、空間フィルタ平均された運動方程式と連続式で、 z を鉛直上向きにとった直交座標(x, y, z) での流速成分 (u, v, w) とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zx} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yy} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zy} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xz} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{yz} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{zz} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

である。ここで p は空間平均された圧力、 ρ は水の密度と動粘性係数、 τ_{xx} , τ_{xy} などは空間フィルタ平均により発生するサブグリッド応力である。

水面はその鉛直位置を水平位置の連続関数 $z=h(x,y)$ で表わし、その時間変化は界面の運動学条件を空間平均した

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + v_s \frac{\partial h}{\partial y} = w_s - \frac{\partial \tau_{hx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{hy}}{\partial y} \quad (3)$$

を解くことにより求める。ここで u_s, v_s, w_s は水面での流速成分、 τ_{hx}, τ_{hy} はサブグリッドスケール水面変動により生じる水面の拡散項³⁾である。

2. 2 サブグリッドおよび壁面モデル

(1)式のサブグリッド応力 τ_{xx} , τ_{xy} などには標準 Smagorinsky モデル⁵⁾、dynamic Smagorinsky モデル⁶⁾、および Kobayashi により提案されている coherent モデル⁷⁾の適用を検討する。dynamic Smagorinsky モデルは基礎的 2 次元流れで、比較的低いレイノルズ数の条件で検証され、モデル比較の基準にもなっている。通常安定計算のため、平均流が一様な方向に平均する必要があるが、ここでは 3 次元実スケール流れを扱うので、平均をとる必要がない、ローカルなもので、サブグリッド応力成分間で最適化する Lilly の手法⁸⁾を用いたものと比較する。また Kobayashi coherent モデル⁷⁾は計算負荷が少ないので dynamic Smagorinsky モデルに相当する実用性が期待されているので、ここでも比較の対象とした。それぞれのモデルの詳細は参考文献を参照されたい。

壁面モデルには筆者ら²⁾が提案・使用している平衡壁面乱流の壁面則を用いる壁面応力モデルを用いる。すなわち

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= C_d \rho V_1 v_1, & \tau_{xz} &= C_d \rho V_1 w_1 \\ \tau_{yx} &= C_d \rho V_1 u_1, & \tau_{yz} &= C_d \rho V_1 w_1 \\ \tau_{zx} &= C_d \rho V_1 u_1, & \tau_{zy} &= C_d \rho V_1 v_1 \end{aligned} \quad (4)$$

である。ここで $V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}$ は壁面までの垂直距離 z_1 の最近傍セル中心での流速、 C_d は壁面応力係数で、壁面距離、壁面粗度に応じ、次のような平均流速に適用される壁面則を用いて算定する。

$$\begin{aligned} C_d &= \left[A \ln \frac{z_1 u_\tau}{v} + B \right]^{-2}, \quad \frac{k u_\tau}{v} \leq 100, \text{ and } \frac{z_1 u_\tau}{v} > 10, \\ C_d &= \left[\frac{z_1 u_\tau}{v} \right]^{-2}, \quad \frac{k u_\tau}{v} \leq 100, \text{ and } \frac{z_1 u_\tau}{v} \leq 10, \\ C_d &= \left[A \ln \frac{z_1}{k} + C \right]^{-2}, \quad \frac{k u_\tau}{v} > 100 \end{aligned} \quad (5)$$

ただし u_τ はその成分が(4)式で与えられる壁面摩擦応力 τ_w で定義される摩擦速度 ($= \sqrt{\tau_w / \rho}$) で、 $A(=2.5)$, $B(=5.2)$, $C(=8.5)$ はモデル定数である。これらの式は、(5)式の最後の式が使われる完全粗面以外の場合、陰的に解く必要がある。この壁面応力モデルは、いわゆる wall model あるいは DES の壁面近傍モデリングに相当する¹⁰⁾が、一般的な LES で壁面近傍の解像度のある場合、またそうではないが、広く仮定される粘着条件と流速の線形分布および粘性法則より水平面 ($z=\text{const}$) に働く摩擦応力を

$$\tau_{xz} = \rho v \frac{u_1}{z_1}, \quad \tau_{zy} = \rho v \frac{v_1}{z_1} \quad (6)$$

とする計算とも比較する。さらにこれの改良として、放物線分布仮定を適用し、壁面最近傍セルとその次のセル中心 z_2

の流速 (u_2, v_2) を用い

$$\tau_{yx} = \rho \nu \frac{(z_2^2 u_1 - z_1^2 u_2)}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)}, \quad \tau_{yy} = \rho \nu \frac{(z_2^2 v_1 - z_1^2 v_2)}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)} \quad (7)$$

により壁面応力を算定する方法も比較する。

次に水面変動の項であるが、これには横嶋・中山⁴⁾で提案したモデルを用い

$$\tau_{hx} = -\gamma_{SGS} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \tau_{hy} = -\gamma_{SGS} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (8)$$

と置く。ここで、 γ_{SGS} はサブグリッド水面変動拡散係数で

$$\gamma_{SGS} = C_h \nu_{SGS} \quad (9)$$

とサブグリッド渦粘性係数 ν_{SGS} に比例するとし、 C_h の値は 0.5 とする。

2. 3 数値計算手法の概要

計算法は前報²⁾で詳細を記述した方法に従うのでここでは概要にとどめる。

食違い直交格子を用い、まず運動方程式を陽的に時間進行させ流速の予測値をもとめ、その速度成分が連続の式を満たすように、圧力と速度成分を反復修正する HSMAC 法である。水面位置は圧力修正段階で水面鉛直位置について解く。本報告での計算では、格子間隔を等間隔あるいは変化率を 4% 以下と小さく抑え、空間差分は全て 2 次精度中心差分としている。時間積分は 3 次精度 Adams-Basforth 法を用いる。

3. 高レイノルズ数基礎的流れでの検証

3. 1 完全発達平坦開水路乱流

上記の LES 計算法をまず通常検証ケースとしてよく用いられる発達したチャンネル流を計算し手法の確認を行う。ただし本計算法は自由水面流を対象とするので、流れ領域上端が水面である平坦開水路流とする。これは多くの DNS 計算結果の行われている平行平板間チャンネル流の下半分に相当し⁸⁾、フルード数の低い場合は水面効果が比較的小さく、水面近傍以外ではほぼ同等の流れになる。平均流速は標準対数則に従い、水面近傍で境界層外層のウエークに似た成分が現れる。ここでは低フルード数、高レイノルズ数流れを対象とし、比較にはこれまで発表されている DNS 計算のうち Hoyas & Jimenez⁹⁾ により行われた最も高いレイノルズ数（摩擦レイノルズ数 $Re_t=2,000$ ）の結果を用いる。

図-1, 2 に標準 Smagorinsky モデルと式(4), (5)で表わされる壁面応力モデルを用いて行われた LES 計算の平均流速分布とレイノルズせん断応力 ($-uw$) 分布を示す。両方とも摩擦速度 $(u_* = u^*)$ で無次元化した壁面変数 $(u^+ = u/u^*, z^+ = zu^*/\nu)$ である。格子数はケースによりやや異なるが $64 \times 40 \times 40$ または $126 \times 80 \times 60$ で比較的少ない格子数である。各計算ケースの壁面近傍解像度はグラフの壁面最近傍点の位置より判断できる。LES 計算には、実河川や水路であり得る、水深 5m、

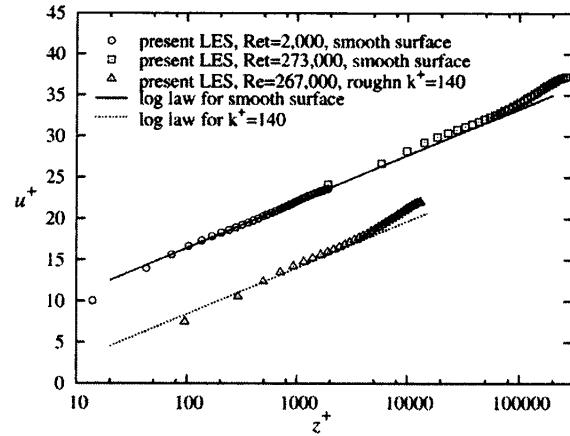


図-1 滑面及び粗面平坦開水路乱流計算結果、平均流速分布

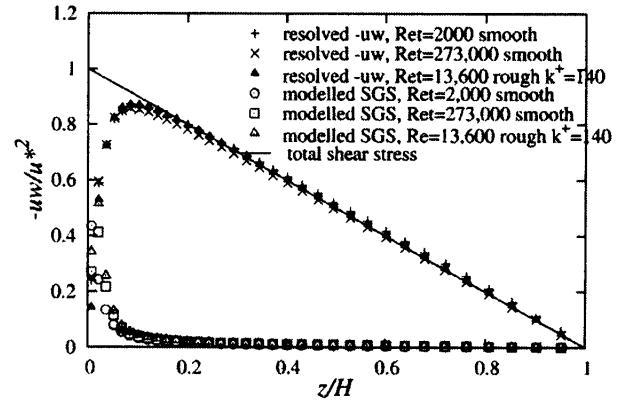


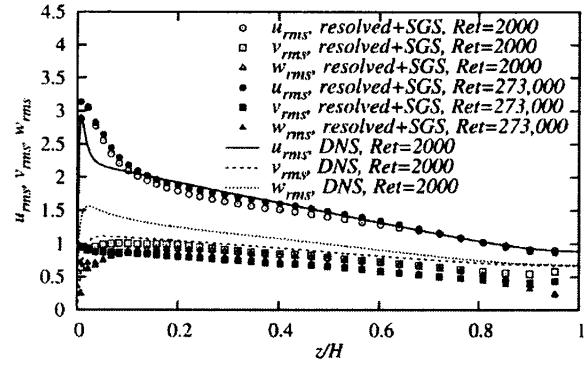
図-2 滑面及び粗面平坦開水路乱流計算結果、レイノルズせん断応力分布

流速 10m/s 程度の高レイノルズ数 ($Re_t=273,000$) 流れ、さらにレイノルズ数はその中間であるが粗度レイノルズ数が $k+=140$ のほぼ完全粗面の 3 つのケースの結果である。水路勾配を 0.000473 とし、摩擦速度 u_t を固定した計算であるので、フルード数はケースにより異なり平均流速が高くなる高 Re_t ケースでやや高くなるが、全て 0.4 以下の常流である。何れも壁面近傍粘性底層は解像していないが、計算領域全体で標準対数則および粗面対数則に沿った結果である。高 Re_t ケースと粗面ケースでは水面近傍で対数則から上方にずれる後流成分が表れている。

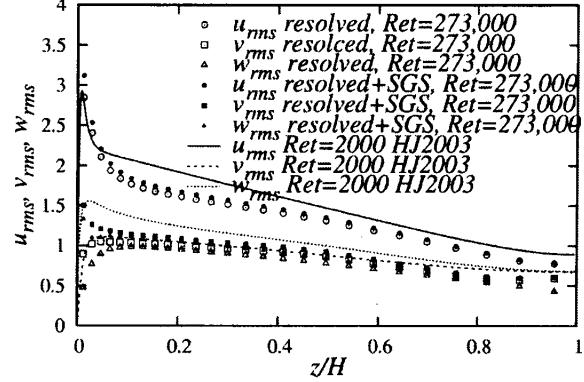
図-2 は解像された変動流速より求められた (resolved) レイノルズ応力成分とサブグリッドモデルにより算定された瞬時サブグリッド (SGS) 応力の平均値を示す。resolved 応力成分は、レイノルズ数に殆ど関係なく、水面から水深の約 80% の領域で完全発達開水路流の線形分布になり、底面近傍で減少する形となっている。サブグリッド成分は底面近傍でこれを補うようになっており、値は高レイノルズ数ケースおよび粗面ケースで大きくなっている。粘性応力は壁面と近傍数点でのみ有意値がありその他ではほぼゼロである。これらの結果より、実スケール開水路流の予測では、本手法で、平均流速およびせん断応力さらにその結果壁面応力の推定が、うまくできると言える。

次に平均流速と壁面摩擦には直接影響しないが、重要な乱流特性の垂直応力分布結果を検証する。図-3 に図-1, 2 に示した計算のうち、滑面 $Re_t=2000$ のケースの乱れ強度計算結果をやはり摩擦速度で無次元化した量で示す。 $Re_t=2000$ の場合、チャンネル流であるが Hoyas & Jimenez⁹⁾による DNS 結果があり、水面近傍以外の領域で比較が可能なので、解像された resolved 成分およびサブグリッド成分を加えたものわせて示している。図-3(a) は図-1, 2 の計算と同じ標準 Smagorinsky モデルを用いた結果であるが、鉛直(z)方向乱れ強度 w_{rms} と横断(y)方向乱れ強度 v_{rms} の値が全体的に低く、底面近傍では主流方向成分 u_{rms} が大きい結果になっている。これはこれまで標準 Smagorinsky を用いた平行平板間乱流の LES 計算結果の傾向と一致しており、壁面近傍で非等方性が強くなっている。

(a) 標準 Smagorinsky モデル



(b) dynamic Smagorinsky モデル



(c) Kobayashi coherent モデル

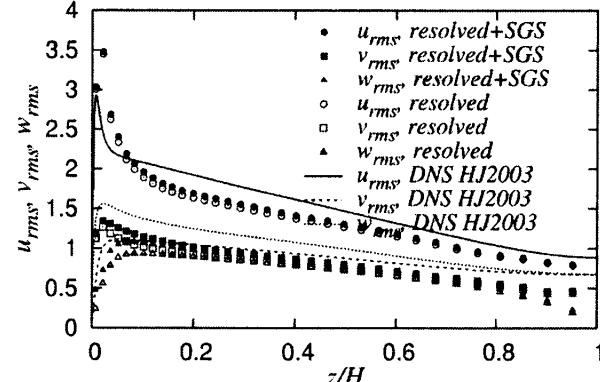
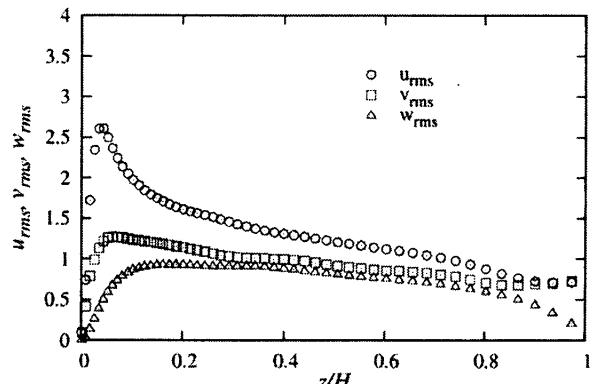
図-3 滑面平坦開水路乱流計算結果、乱れ強度分布 $Re_t=2000$ 

図-4 粗面平坦開水路乱流計算結果、乱れ強度分布

$$Re_t=26,700, k+=140$$

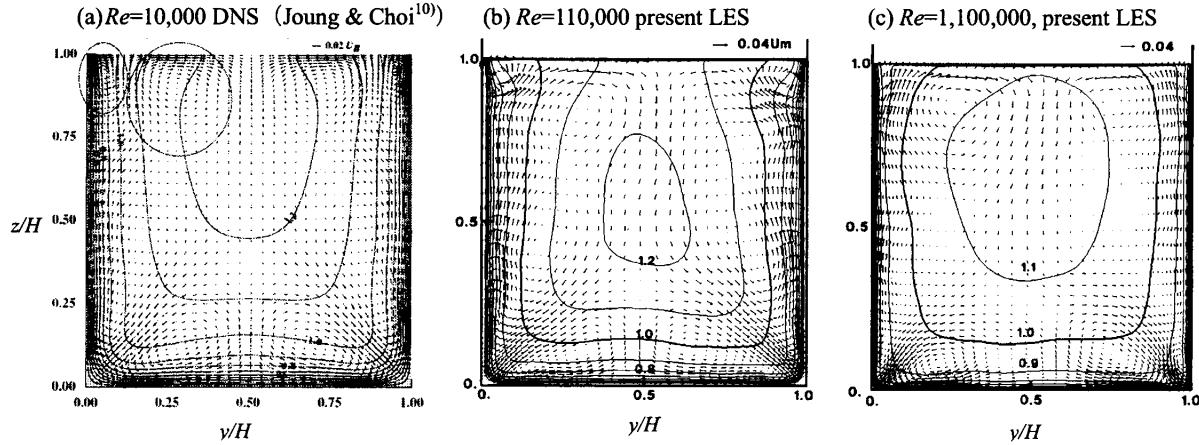


図-5 矩形断面開水路流計算結果、主流流速コンタと2次流ベクトル

図-3(b)にdynamic Smagorinsky モデル、図-3(c)にKobayashi モデル⁷⁾を用いて計算した結果を示してある。これら追加モデルによる平均流速結果は示していないが、壁面に粘着条件（式(6), (7)）を用いた計算、および(4), (5)式の壁面応力モデルを用いた計算を行った。式(6), (7)を用いた計算結果では平均流速分布が対数則の上方にずれる結果になるが、(4), (5)式を用いた場合図-1 の結果と同等の結果が得られているので、これに対応する乱れ強度結果を示している。図-3(b)の dynamic Smagorinsky を用いた結果は底面近傍の非等方性は改善されているが、それより外側の領域では全てDNS より低い値になっている。Kobayashi coherent モデルは余分な計算時間を要しないが、dynamic モデルでは計算時間が大幅に増加することを考えるとその優位性は次項以降の他の結果を見てから判断すべきである。

次に図-4 に粗面水路流の計算結果を示す。この場合比較する実験あるいは直接シミュレーションがないため本 LES 計算結果ケースのみの図示である。粗面近傍では粗度要素の詳細に依存するが、砂粒のような不規則な形状の場合乱れ強度は一般的に滑面乱流に比べ等方化することが知られているが、本結果にもその効果がみられる。

3. 2 完全発達矩形開水路乱流

レイノルズ垂直応力は発達開水路等流では平均流速のレイノルズ平均式に現れず、直接平均流速分布に影響しないが、湾曲水路や長方形水路などの2次流の生成に大きい影響を持つ。特に壁面と底面の隅角部などのPrandtl の第2種2次流の生成に重要である。そこで垂直応力成分の2次流さらに流れ全体の予測性能への影響を調べるために、矩形断面水路内流れについて、実スケール水路に相当する高レイノルズ数で計算し、検証する。

図-5 は標準 Smagorinsky モデルと壁面応力モデルを用い、平均流速と平均水深で定義されるレイノルズ数が 1.1×10^5 および 1.1×10^6 で、用いた格子数が $151 \times 99 \times 84$ の結果である。2次流ベクトルと主流流速のコンタの図である。比較のため非常に低いレイノルズ数ではあるが Joung & Choi¹⁰⁾の DNS 結果も図-5(a)に示す。底面隅角部に向かう2次流と水面と側壁の隅に水面渦が再現されている。レイノルズ数の大きい場合でも安定計算が可能で、流速が水路中央部で一様になる傾向、壁面近傍で急変する傾向などが再現され、2次流渦がコーナーに寄せられる傾向も再現されているのが見てとれる。水面渦も壁面に寄る傾向がみられ妥当な結果と言える。

このように平均流速分布および壁面摩擦に関しては、少なくとも流れ方向にほとんど変化のない完全発達開水路乱流の計算には上記手法で十分であると考えられる。

3. 3 開水路段落ち流れ

前節の検証例はいずれも完全発達した流れで、流れ方向の変化がない平衡乱流である。こういった平衡壁面乱流には式(5)の基である壁面則の適用性よいが、流れ方向に変化する非平衡流に適用できるかどうかは不明である。実問題では流れ方向のみならず3次元的に変化し、さらには逆流や水面大変形が起こる場合もある。ここでは逆流を伴う基本的な流れの段落ちを過ぎる流れを計算し、非平衡で逆流を伴う壁乱流での適用性を検証する。ただし、ここでも十分にスケールの大きい場合の詳細な計測結果がないので、実験室スケールの結果と比較することにする。

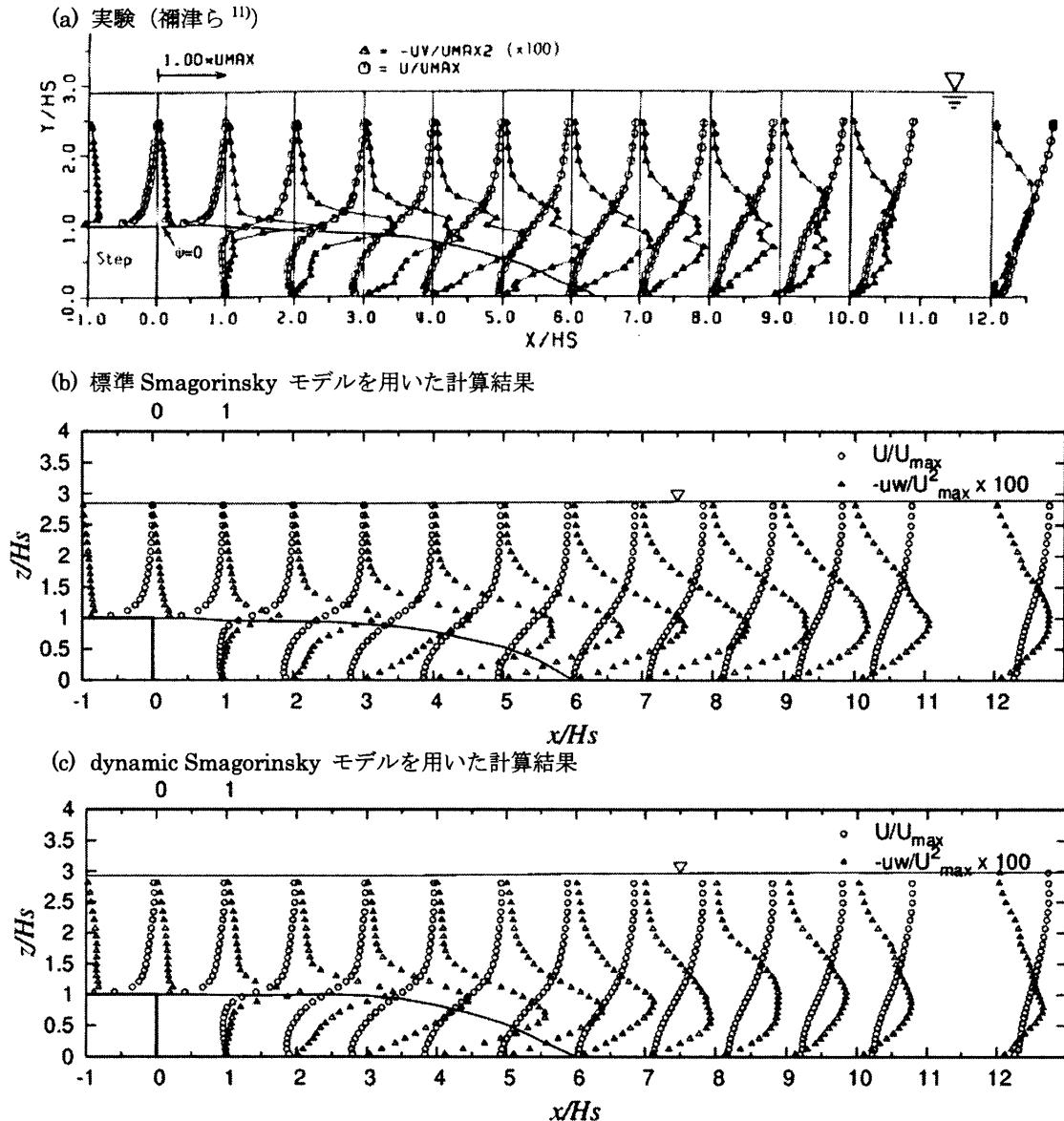


図-6 常流段落ち流れ計算結果、平均流速およびレイノルズせん断応力分布

まず水面変化の小さい常流段落ち流れの計算である。段落より十分上流でフルード数 0.19 の常流で、下流ではさらに流速が減少し水面が上がるケースである。この場合段落ち上流流入部は発達した等流であるので、ステップ高さ H_s の約 10 倍の領域を発達領域とし、その下流域の瞬時流速圧力分布を上流域流入部のリサイクルし発達した等流を作成する手法を用いる。その他の計算条件は比較のため瀬津ら¹¹⁾による実験結果に合わせてある。ただし実験での水路勾配は不明であるので、計算では定常な流れが保たれる値に設定している。

図-6 は標準 Smagorinsky モデルおよび dynamic Smagorinsky モデルを用いた計算結果の、平均流速とせん断応力分布である。水面位置と剥離流線も示している。逆流域を含め全体的に平均流速、せん断応力とも良好な一致が見られる。ただし、再付着点のやや下流で、標準 Smagorinsky モデルではせん断応力が過大予測になっており、さらに下流域ではピーク位置が底面に寄っている傾向がある。しかし両モデル間の差は小さい。

図-7 は主流方向および鉛直方向乱流強度 u_{rms}, w_{rms} についての同様の比較図である。標準 Smagorinsky モデルを用いた平坦開水路流の計算結果で見られた異方性がここでも見られ、鉛直方向乱れが小さめに計算されている。また乱流強度分布も、せん断応力同様ピークをとる位置がかなり底面に近くなっている。これら乱流応力特性が剥離渦と水面の干渉など乱流構造の推定にどれだけ影響するかは不明である。水深は標準 Smagorinsky モデルの結果が実験に近く、水面

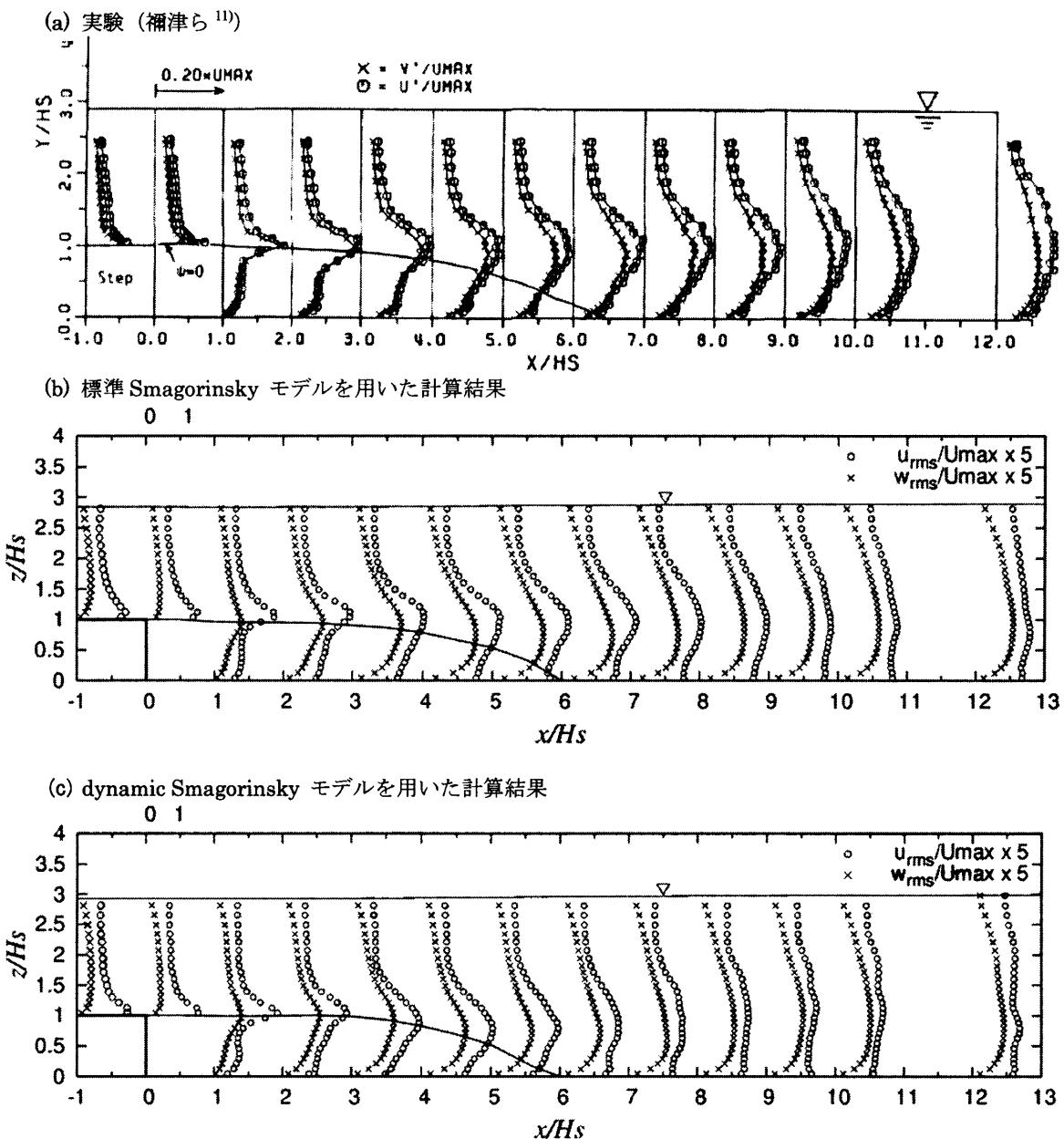


図-7 常流段落ち流れ計算結果、主流方向および鉛直方向乱流強度

の上昇は双方とも実験に近い値になっている。シミュレーション計算の目的により詳細な検証が必要ではあるが、実務に使用するには計算効率も考慮して判断すべきである。

次に水面の大きく変化する射流の場合を検証する。図-8は段落ち上流で限界に近い常流で、段を過ぎるところで射流に変化し、下流でも高速のまま等流に落ち着く流れである。また下流端で重力と底面せん断の釣合う等流に漸近する流れであるので、下流での底面抵抗に対応する水路勾配を設定し、流出面での水面勾配と水路勾配が等しくなる等流条件を適用している。

計算結果は標準 Smagorinsky モデル、dynamic Smagorinsky モデル、及び Kobayashi モデルを用いた結果と実験結果を比較している。全ての計算で、ステップすぐ上で平均流速が水面値より大きくなる加速流特性が出ている。しかしステップ先端から下流にかけての剥離せん断層での流速分布は実験に近い形になっており、逆流域の大きさ、水面形は実験結果とよく合う結果となっている。計算での水面は再付着点より下流でやや上昇気味になっている。これは実験とやや異なるが、下流側の計算領域が十分でないためと考えられる。せん断応力は全てのケースで実験より大きい値になっているが、これは実験結果の無次元化に用いられた最大流速 U_{max} の定義が不明確で、計算結果では水面の最大値

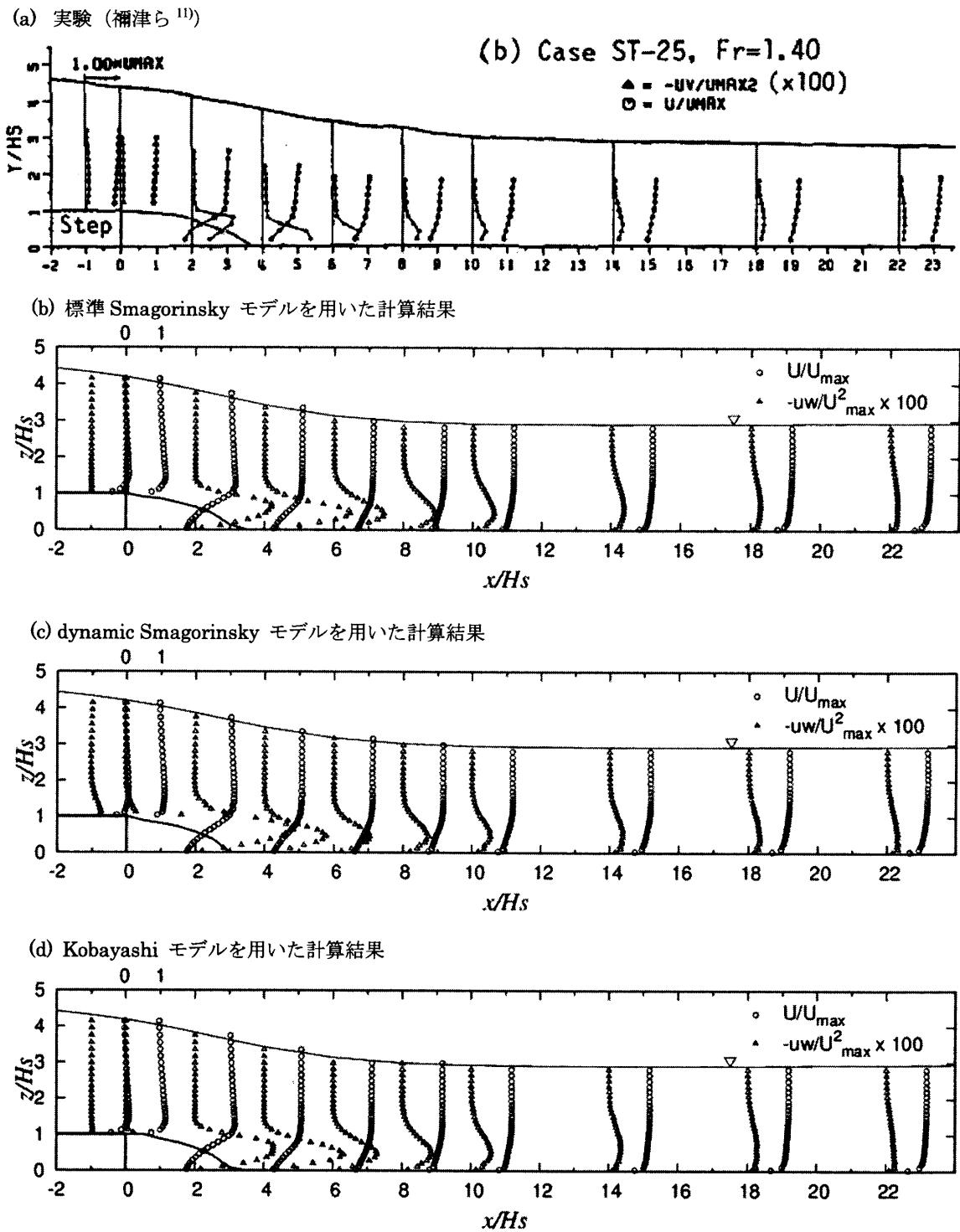


図-8 射流段落ち流れ計算結果、平均流速およびレイノルズせん断応力分布

を用いていることにも影響されている。モデルによる差は小さく標準 Smagorinsky モデルは他の改良モデルに比べ劣っているとは言えない。

4. 結論

LES を河川や海岸などの実際の自由水面流に適用する際重要な要素である、スケールと境界、流れの複雑さ、さらに

適切なサブグリッドモデルと壁面モデルを再検討した。粘性スケールまた粗度要素、形状を解像しない、非常に粗い数値計算解像度での LES シミュレーションにも平衡壁面乱流の壁面則を用いることにより、ほぼスケールに依存しないシミュレーションが可能で、良好は平均流速、乱流応力が得られることが判明した。これまで、wall model を用いず、粘着境界条件を適用する手法では高レイノルズ数流れの壁面摩擦や乱流応力分布の再現が不可能であった。本手法では実スケール乱流の乱流応力を担う大スケール変動が解像度に応じ再現でき、低い解像度の格子でも工学的 LES シミュレーションが可能になることが確認された。計算時間とコーディングが必要な改良モデルでは、特に dynamic Smagorinsky モデルは乱流応力分布の予測を改善することが分かったが、実問題への応用では計算時間も重要で、必ずしも必要ではなく、むしろ壁面解像が不十分な場合壁面モデルが重要であることも判明した。水面の変動については十分検討できていないので今後検討すべきである。また貯水池のようにスケールは大きいが、非常に遅い流速で非乱流域の大きい流れや、流速はあるが乱れや抵抗が薄い境界層に限られているような流れは、粘性で乱れを抑えている層流とは異なり、層流も扱えるモデルでも対応できないので、こういった状況での適用性の検討も必要になる。

参考文献

- 1) Sagaut, P.: *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- 2) Nakayama, A.: Large-Eddy Simulation Method for Flows in Rivers and Coasts Constructed on a Cartesian Grid System, Memoirs of Construction Engineering Research Institute, Vol.54, pp.13-27, 2012.
- 3) Shen, L. and Yue, D.K.P.: Large-eddy simulation of free-surface turbulence. *J. Fluid Mech.* Vol. 440, pp.75-116, 2001.
- 4) 横嶋 哲, 中山昭彦: 開水路乱流のLESにおける水面変動のフィルタリング効果, 土木学会水工学論文集, 第46巻, pp.379-384, 2002.
- 5) Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment, *Mon. Weather Rev.*, Vol.91, pp.99-164, 1963.
- 6) Lilly, D.: A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure model, *Phys. Fluids A*, Vol.4, pp. 633, 1992.
- 7) Kobayashi, H.: The subgrid-scale models based on coherent structures for rotating homogeneous turbulence and channel flow, *Phys. Fluids*, Vol.17, 045104, 2005.
- 8) Calmet, I. and Magnaudet, J.: Statistical structure of high-Reynolds-number turbulence close to the free surface of an open-channel flow, *J. Fluid Mech.* Vol.474, pp.355-378, 2003.
- 9) Hoyas, S. and Jimenez, J.: Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re=2003$, *Phys. Fluids*, Vol.18, 001702, 2006.
- 10) Joung, Y. and Choi, S.-U.: Direct numerical simulation of low Reynolds number flows in an open-channel with side walls, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.62, pp.854-874., 2012.
- 11) 福津家久, 中川博次, 天野邦彦, 藤本和久: 開水路段落ち流れの流速回復過程と再付着点からの組織渦の放出特性, 第31回水理講演会論文集, pp.413,418, 1987.

著者

- | | |
|-------|-------------------------|
| 久末 信幸 | 関西電力（株）博士（工学）水理学 |
| 中山 昭彦 | 所員, Ph.D., 流体工学, 水理学 |
| 横嶋 哲 | 静岡大学大学院, 博士（工学）, 数値流体力学 |